

# 非线性 RLC 电路的新解法及数值仿真\*

黄 偲<sup>1</sup>, 余顺争<sup>2</sup>

(1. 中国能源建设集团广东省电力设计研究院网络信息部, 广东 广州 510663;  
2. 中山大学电子和通信工程系, 广东 广州 510275)

**摘 要:** 给出一类非线性 RLC 电路的新解法及数值仿真: 电路的状态变量表示为相位角简谐函数; 电路状态方程的求解归结为相位角对时间的一阶导数的确定; 时间自变量与中间变量相位角的关系由响应频率倒数的积分表示; 从而算出电路的相轨线、时程曲线、相程曲线、时幅曲线、相幅曲线、幅频曲线、相频曲线和响应周期, 数值仿真显示, 结果与数值积分法吻合良好。

**关键词:** 非线性 RLC 电路; 状态方程; 新解法; 数值仿真

**中图分类号:** TN710 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2016) 03-0083-06

## The new solution and numerical emulation for a nonlinear RLC circuits

HUANG Cai<sup>1</sup>, YU Sunzheng<sup>2</sup>

(1. Network & Telecommunication Division, China Energy Construction Group Guangdong Electric Power Design & Research Institute, Guangzhou 510663, China;  
2. Department of Electronics and Communication Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** A new solution and its numerical emulation for the nonlinear RLC circuit are given. The state variable of the circuit is expressed as the simple harmonic function of the phase angle. The determination for the first derivative of the phase angle about the time are used to solve the state equations. The relation of the time independent variable with the middle variable of the phase angle is shown as the integral for the reciprocal of the response frequency. The numerical values, including the phase portraits, the time-distance curve, the phase-distance curve, and the time-range curve, and the phase-range curve, and the range-frequency curve, and the phase-frequency curve and the response period, are computed. The results are in good agreement with the numerical integral method.

**Key words:** nonlinear RLC circuits; state equation; new solution; numerical emulation

由 RC、RL、RLC 构成的串联电路, 在 RLC 串联电路的不同过程中具有不同的特性, 包括暂态特性、稳态特性、谐振特性, 这些状态特性是 RLC 电路设计需要解决的关键问题。

非线性 RLC 电路状态变量之间的变化关系可

由以下的非线性微分方程

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = g(x) + \varepsilon f(x, y)y \end{cases} \quad (1)$$

描述。其中,  $x$  和  $y$  是电路的状态变量,  $g(x)$  和  $f(x, y)$  是其变量的非线性函数,  $\varepsilon$  是调整参数,

\* 收稿日期: 2015-12-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11172334)

作者简介: 黄偲 (1983 年生), 男; 研究方向: 电子通信; E-mail: lendies@163.com

$(\dot{\phantom{x}}) = \frac{d(\phantom{x})}{dt}$ 。目前, 非线性 RLC 电路 (1) 尚无通用解法。实际上, 精确求解一般非线性 RLC 电路 (1) 是困难的, 人们只好寻求近似解法。弱非线性电路分析研究得较多, 比如摄动法、多尺度法、平均法和谐波平衡法等<sup>[1]</sup>。近 10 多年来出现一些很有意义的成果<sup>[2-15]</sup>。本文致力于强非线性 RLC 电路的分析与仿真, 给出一种简易解析算法及其数值仿真。本解析法引进时间与相位角的非线性变换, 将强非线性 RLC 电路的状态变量表示为相位角的简谐函数, 定量算出时间与相位角 (时-相) 的关系式。算例的分析与仿真结果表明, 本算法与数值积分的龙格-库塔法吻合良好。

## 1 新解法概述

将式 (1) 改写为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x) + \varepsilon f(x, y)y}{y}$$

或

$$ydy = g(x)dx + \varepsilon f(x, y)ydx$$

上式两边对  $x$  由零开始积分, 得

$$y^2 - y_0^2 = 2[v(x) - v(0)] + 2 \int_0^x \varepsilon f(x, y)ydx \quad (2)$$

这里,  $y_0 = y(0)$ ,  $v(x) = \int_0^x g(x)dx$ 。

直接假设非线性 RLC 电路 (1) 的状态变量为相位角  $\varphi$  简谐函数

$$\begin{cases} x(\varphi) = a \cos \varphi + b \\ y = \dot{x} = -a\dot{\varphi} \sin \varphi \end{cases} \quad (3)$$

这里,  $a$  和  $b$  待定常数, 分别表示振幅和偏心距,

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (4)$$

是中间变量相位角  $\varphi$  与时间自变量  $t$  微分关系, 也表示电路状态变量的响应频率。式 (4) 变形为

$$dt = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} \quad (5)$$

式 (5) 两边对  $\varphi$  积分, 得

$$t = t_0 + \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = t(\varphi) \quad (6)$$

其中,  $t_0 = t(0)$ 。式 (6) 给出时间  $t$  与相位角  $\varphi$  的时-相变换关系式。至此, 电路的分析归结为  $a$ 、 $b$  和  $\dot{\varphi}$  的确定。为此, 将式 (3) 代入式 (2), 可得

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{2a}}{a|\sin \varphi|} \left\{ v(a \cos \varphi + b) - v(a + b) + \right.$$

$$\left. a\varepsilon \int_0^\varphi f(a \cos \theta + b, -a\dot{\theta} \sin \theta) \dot{\theta} \sin^2 \theta d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

$$\int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi + b, -a\dot{\varphi} \sin \varphi) \dot{\varphi} \sin^2 \varphi d\varphi = 0 \quad (8)$$

$$v(-a + b) - v(a + b) +$$

$$a\varepsilon \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi + b, -a\dot{\varphi} \sin \varphi) \dot{\varphi} \sin^2 \varphi d\varphi = 0 \quad (9)$$

式 (6) 中取  $\varphi = 2\pi$  且  $t_0 = 0$  则电路的稳态周期为:

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} \quad (10)$$

联立式 (8) 和 (9) 可确定振幅  $a$  和偏心距  $b$ , 如果  $\dot{\varphi}$  已知。然而, 对一般的非线性函数  $g(x)$  和  $f(x, y)$ , 式 (7) 表示的响应频率  $\dot{\varphi}$  难以解析表示。为此, 用迭代法近似求解之。以未扰 ( $\varepsilon = 0$ ) 频率作为迭代法的初值, 即

$$\dot{\varphi}_0 = \left\{ \frac{2(v(a_0 + b_0) - v(a_0 \cos \varphi + b_0))}{a_0^2 \sin^2 \varphi} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

迭代格式为:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{k+1} = & \frac{\sqrt{2a_{k+1}}}{a_{k+1} |\sin \varphi|} \left\{ v(a_{k+1} \cos \varphi + b_{k+1}) - \right. \\ & v(a_{k+1} + b_{k+1}) + a_{k+1} \varepsilon \int_0^\varphi f(a_{k+1} \cos \varphi + b_{k+1}, \\ & \left. - a_{k+1} \dot{\varphi}_k \sin \varphi) \times \dot{\varphi}_k \sin^2 \varphi d\varphi \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ & (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (12)$$

电路的状态变量的  $k$  阶近似解为:

$$\begin{aligned} x_k &= a_k \cos \varphi + b_k, \\ y_k &= -a_k \dot{\varphi}_k \sin \varphi \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $a_k$  和  $b_k$  由以下二式解出:

$$v(-a_k + b_k) - v(a_k + b_k) +$$

$$a_k \varepsilon \int_0^{2\pi} f(a_k \cos \theta + b_k, -a_k \dot{\theta}_{k-1} \sin \theta) \dot{\theta}_{k-1} \sin^2 \theta d\theta = 0 \quad (14)$$

$$\int_0^{2\pi} f(a_k \cos \theta + b_k, -a_k \dot{\theta}_{k-1} \sin \theta) \dot{\theta}_{k-1} \sin^2 \theta d\theta = 0 \quad (15)$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

$k$  阶近似的时-相变换式及响应周期分别为:

$$t_k = t_0 + \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_k} = t_k(\varphi) \quad (16)$$

$$T_k = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}_k} \quad (17)$$

## 2 应用

考虑如图 1 所示的电容库伏特性为荷控型 RLC

串联电路<sup>[1]</sup>，其非线性电容  $C$  的库伏特性为

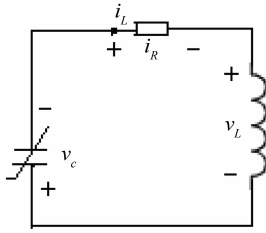


图 1 RLC 串联电路  
Fig. 1 RLC series circuit

$v = f(q) = -q + q^3$ 。电阻  $R$  和电感  $L$  均为线性。以电荷  $q$  和电感电流  $i_L$  为状态变量，电路的状态方程可表为

$$\begin{aligned} \dot{q} &= i_L \\ i_L &= -\frac{R}{L}i_L - \frac{1}{L}f(q) = \\ &= -\frac{R}{L}i_L + \frac{1}{L}q - \frac{1}{L}q^3 \end{aligned} \quad (18)$$

试讨论该电路的周期振荡解。

令  $x = q, y = i_L, L = 1$ ，式 (18) 化为

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\delta y + x - x^3 \quad (19)$$

自治电路的状态方程 (19) 有三个平衡点  $(0, 0)$ ， $(-1, 0)$ ， $(1, 0)$ ，前者是鞍点，绕该点电路无稳定周期振荡；后二者是渐近稳定焦点。下面讨论环绕焦点的周期振荡解。

首先考虑电路绕焦点  $(1, 0)$  的振荡。作  $x$  坐标的平移变换

$$\bar{x} = x - 1 \text{ 或 } x = \bar{x} + 1$$

式 (19) 变为

$$\dot{\bar{x}} = y, \quad \dot{y} = -2\bar{x} - 3\bar{x}^2 - \bar{x}^3 - \delta y \quad (20)$$

比较式 (1) 得

$$g(\bar{x}) = -2\bar{x} - 3\bar{x}^2 - \bar{x}^3, f(\bar{x}, y) = -1$$

用上述的迭代法近似求解之。无阻尼 ( $\delta = 0$ ) 时，由式 (11) 及 (19) 得电路 (20) 的初始频率

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{\sqrt{Q}}{2} \sqrt{1 + \frac{a_0}{Q} [8(1 + b_0) \cos \varphi + a_0 \cos 2\varphi]} \quad (21)$$

其中，

$$Q = 8 + 24b_0 + 12b_0^2 + 3a_0^2 \quad (22)$$

将式 (21) 展开为泰勒展开式，并取前二次项 (为书写方便，记  $a = a_0, b = b_0$ )，得

$$\dot{\varphi}_0 \approx \frac{\sqrt{Q}}{2} \left\{ 1 + \frac{a}{2Q} [8(1 + b) \cos \varphi + a \cos 2\varphi] - \right.$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{a^2}{8Q^2} [8(1 + b) \cos \varphi + a \cos 2\varphi]^2 \right\} = \\ & \frac{\sqrt{Q}}{2} \left\{ 1 - \frac{4a^2}{Q^2} (1 + b)^2 - \frac{a^4}{16Q^2} + \right. \\ & \quad \left. \frac{a}{Q} (1 + b) \left( 4 - \frac{a^2}{Q} \right) \cos \varphi + \right. \\ & \quad \left. \left[ \frac{a^2}{2Q} (1 + b) - \frac{4a^2}{Q^2} (1 + b)^2 \right] \cos 2\varphi - \right. \\ & \quad \left. \frac{a^3}{Q^2} (1 + b) \cos 3\varphi - \frac{a^4}{16Q^2} \cos 4\varphi \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

将式 (23) 代入式 (14)、(15)，并注意到式 (20)，分别得

$$Q^2 - \frac{2a^2Q}{4}(1 + b) - 2a^2(1 + b)^2 - \frac{a^4}{16} = 0 \quad (24)$$

$$2b + 3b^2 + b^3 + a^2 + a^2b = 0 \quad (25)$$

将式 (23) 代入式 (12) 可得

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \sqrt{r_1} \left\{ 1 + \frac{1}{r_1} (r_2 \cos \varphi + r_3 \cos^2 \varphi + r_4 \sin \varphi + \right. \\ & \quad \left. r_5 \sin \varphi \cos \varphi + r_6 \sin^3 \varphi + r_7 \sin^3 \varphi \cos \varphi) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (26) \end{aligned}$$

其中，

$$r_1 = \frac{1}{2}(4 + 12b + 6b^2 + a^2), \quad r_2 = 2a(1 + b)$$

$$r_3 = \frac{1}{2}a^2, \quad r_4 = \frac{\delta}{8Q^2}(1 + b) \left( 4aQ - \frac{2}{3}a^3 \right)$$

$$r_5 = \frac{\delta}{8Q^2} \left[ \frac{a^2}{4}Q(1 + b) - 2a(1 + b)^2 - \frac{a^4}{48} \right]$$

$$r_6 = \frac{3\delta}{80Q^2}a^3(1 + b), \quad r_7 = \frac{\delta a^4}{92Q^2}$$

联立式 (24) 和 (25)，并注意到式 (22) 得

$$a^2 = -2b - b^2 \quad (27)$$

$$Aa^4 + Ba^2 + C = 0 \quad (28)$$

其中，

$$A = \frac{1}{16}(131 - 12b),$$

$$B = 44 + 132b + 61b^2 - 3b^3$$

$$C = 64 + 384b + 768b^2 + 576b^3 + 144b^4$$

由式 (28) 得

$$a^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (29)$$

联立式 (27) 及 (29)，得

$$C = B(2b + b^2) - A(2b + b^2)^2$$

化简上式可得

$$\begin{aligned} & 9b^5 + \frac{1}{4}507b^4 + 1407b^3 + \\ & 1971b^2 + 1584b + 256 = 0 \end{aligned}$$

此方程有三个近似实根

$$b = -37.883\ 833; \quad -2.347\ 637; \quad -0.208\ 053$$

由  $a > 0$  及式 (28) 知, 只有最后者符合题意, 此时,

$$a_1 = 0.610\ 590, \quad b_1 = -0.208\ 053 \quad (30)$$

从而得到电路 (20) 的一次迭代的近似解

$$\bar{x}_1 = a_1 \cos \varphi + b_1, \quad y_1 = -a_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi \quad (31)$$

其中,  $a_1, b_1, \dot{\varphi}_1$  如式 (30) 及 (26)。

电路过点鞍点  $(-1, 0)$  有同宿轨线, 其表达式仍具有式 (31) 的形式, 但幅值与偏心距由以下二式确定

$$-a + b = -1, \quad a = \sqrt{-2b - b}$$

求之得  $\bar{a} = 0.707\ 185, \quad \bar{b} = -0.292\ 815$

在相平面  $(\bar{x}, y)$  上电路的极限环和同宿轨线的数值积分法与本文方法的计算与仿真比较见图 2 (a)。其中, 数值法的初值分别是  $(0.402\ 536\ 9, 0)$  和  $(0.414\ 37, 0)$ 。

电路 (18) 在相平面  $(q, i_L)$  上绕平衡点  $(-1, 0)$  和  $(1, 0)$  的极限环, 以及过鞍点  $(0, 0)$  的同宿轨线的表达式只要在式 (31) 中分别令  $q = -\bar{x} - 1$  和  $q = \bar{x} + 1, i_L$  坐标即为  $y$  坐标便是。于是得电路 (19) 的极限环和同宿轨线数值仿真如图 2 (b)。

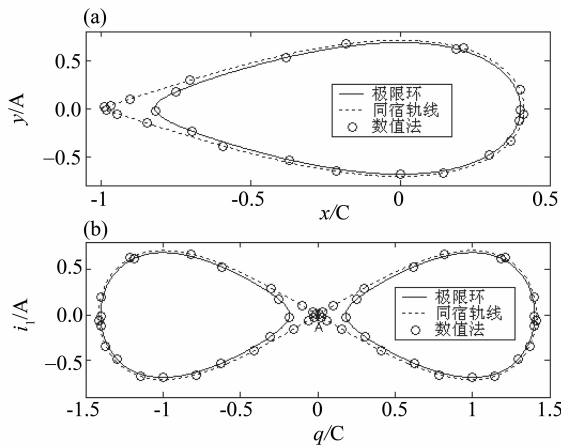


图 2 电路 (18) 的极限环与同宿轨线

Fig. 2 Limit cycle and a homoclinic orbit of the circuit (18)

注意到式 (26), 取  $1/\dot{\varphi}_1$  的泰勒展开式的二次近似

$$\frac{1}{\dot{\varphi}_1} \approx \frac{1}{8r_1^2 \sqrt{r_1}} \{8r_1^2 - 4r_1 \cdot$$

$$\begin{aligned} & (r_2 \cos \varphi + r_4 \sin \varphi + r_6 \sin^3 \varphi) + \\ & 3 [r_3^2 \cos^4 \varphi + r_4^2 \sin^2 \varphi + r_5^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \\ & r_6^2 \sin^6 \varphi + r_7^2 \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi + 2r_6 r_7 \cos^3 \varphi + \\ & 2r_3 r_5 \cos^3 \varphi \sin \varphi + 2r_3 r_7 \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi + \\ & 2r_4 r_5 \sin^2 \varphi \cos \varphi + 2r_4 r_6 \sin^4 \varphi + \\ & 2r_5 r_7 \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi + 2r_6 r_7 \sin^6 \varphi \cos \varphi + \\ & 2(r_2 r_3 + r_3 r_4) \cos^2 \varphi \sin \varphi + \\ & 2(r_2 r_7 + r_3 r_6) \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \\ & 2(r_4 r_7 + r_5 r_6) \sin^4 \varphi \cos \varphi] + \\ & (3r_2^2 - 4r_1 r_3) \cos^2 \varphi + \\ & (6r_2 r_4 - 4r_1 r_5) \sin \varphi \cos \varphi + \\ & (6r_2 r_6 - 4r_1 r_7) \sin^3 \varphi \cos \varphi \} \end{aligned}$$

由式 (16) 得一次迭代的时间  $t$  与相位角  $\varphi$  的关系式

$$\begin{aligned} t_1(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = \beta (c_0 + c_1 \varphi + c_2 \sin \varphi + c_3 \cos \varphi + \\ c_4 \sin \varphi \cos \varphi + c_5 \sin^2 \varphi + c_6 \cos^3 \varphi + c_7 \sin^3 \varphi + \\ c_8 \cos^3 \varphi \sin \varphi + c_{10} \sin^4 \varphi + c_9 \sin^3 \varphi \cos \varphi + c_{11} \cos^4 \varphi + \\ c_{12} \sin^5 \varphi + c_{13} \cos^5 \varphi + c_{14} \sin^5 \varphi \cos \varphi + \\ c_{15} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi + c_{16} \sin^6 \varphi + \\ c_{17} \sin^7 \varphi + c_{18} \sin^5 \varphi \cos^3 \varphi) \quad (32) \end{aligned}$$

其中,

$$c_0 = -4r_1 \left( r_4 + \frac{2r_6}{3} \right) + 3 \left[ \frac{r_3 r_5}{4} + \frac{2(r_2 r_5 + r_3 r_4)}{3} + \frac{32r_1^2 (r_2 r_7 + r_3 r_6)}{15} \right]$$

$$c_1 = 8r_1^2 + \frac{45r_7^2}{128} (144r_3^2 + 192r_4^2 + 48r_5^2 + 120r_6^2 +$$

$$288r_4 r_6 + 144r_3 r_7) + \frac{3r_2^2}{2} - 2r_1 r_3$$

$$c_2 = -4r_1 r_2 + 6r_2 r_3, \quad c_3 = 4r_1 (r_4 + r_6)$$

$$c_4 = \frac{1}{128} (288r_3^2 - 192r_4^2 - 48r_5^2 - 120r_6^2 -$$

$$45r_7^2 - 288a_{10} a_{12} + 144a_{11} a_{13}) + \frac{3a_8^2}{2} - 2a_7 a_9,$$

$$c_5 = 3r_2 r_4 - 2r_1 r_5,$$

$$c_6 = \frac{4r_1 r_6}{3} - 2(r_2 r_7 + r_3 r_6 + r_2 r_5 + r_3 r_4)$$

$$c_7 = -2r_2 r_3 + 4r_4 r_5$$

$$c_8 = \frac{3(16r_3^2 - 5r_7^2 - 16r_5 r_7)}{64}$$

$$c_9 = \frac{(6r_5^2 - 5r_6^2 - 12r_4 r_6)}{8}$$

$$c_{10} = \frac{(3r_3 r_7 + 3r_2 r_6 - 2r_1 r_7)}{2}$$

$$c_{11} = -\frac{3r_3r_5}{4}, \quad c_{12} = \frac{6(r_4r_7 + 3r_5r_6)}{5}$$

$$c_{13} = \frac{6(r_2r_7 + 3r_3r_6)}{5}, \quad c_{14} = -\frac{r_6^2}{2}$$

$$c_{15} = -\frac{5r_7^2}{16} - r_5r_7, \quad c_{16} = -r_3r_7,$$

$$c_{17} = \frac{6r_6r_7}{7}, \quad c_{18} = -\frac{r_7^2}{8}$$

$$\beta = \frac{1}{8r_1^2\sqrt{r_1}}$$

经时相变换后，相图完全重合，但时程曲线  $t - q$  与相程曲线  $\varphi - q$ 、时幅曲线  $t - i_L$  与相 - 幅曲线  $\varphi - i_L$  出现明显差异（见图 3 (a)、(b)），原因是电量  $q$  及电流  $i_L$  关于相位角  $\varphi$  的周期恒为  $2\pi$ ，而关于时间  $t$  的周期是式 (17) 确定的  $T_1 = 6.9359$ ，数值法约为  $\bar{T} = 6.9697$ ，十分接近。

图 3 显示，经未扰频率二次展式仅一次迭代逆变换时 - 程曲线  $q_1 = q(t_1)$ ，与数值积分法的时 - 程曲线  $q = q(t)$  已几乎重合（见图 3 (a)）， $i_{L1} = i_L(t_1)$  亦然（见图 3 (b)），说明本法的计算精度良好。

本法计算的幅频曲线和相频曲线如图 4。

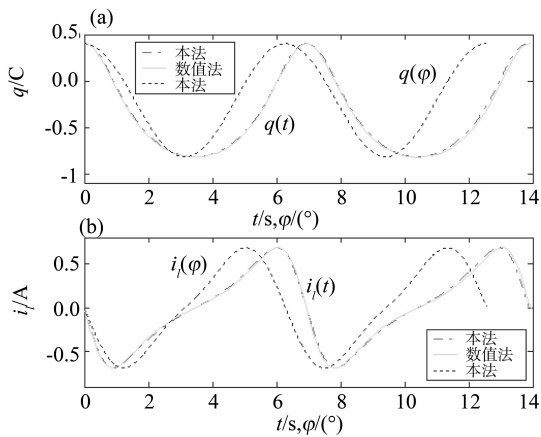


图 3 电路 (18) 的电量及电流与时间和相位的关系曲线  
Fig. 3 Curves of the relationship between power and current with time and phase of the circuit (18)

式 (32) 中取  $\varphi = 2\pi$ ，算得电路 (18) 的极限环的一次频率迭代的近似周期约为  $T = 6.9359$ ，而数值法约为  $\bar{T} = 6.9697$ ，误差仅为  $0.0338$ 。

数值搜索及本文的方法显示，RLC 串联电路 (18) 仅当电阻  $R$  与电感  $L$  数值上的比值  $\delta$  较小，比如  $\delta = 0.0001$  附近才能实现稳态振荡，这在工程上具有实用意义。

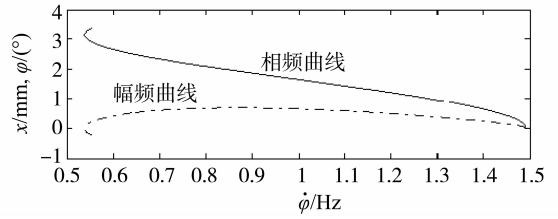


图 4 电路 (18) 的幅频曲线和相频曲线  
Fig. 4 Amplitude frequency curve and phase frequency curve of the circuit (18)

### 3 结 语

本文提出的新解法仅涉及初等微积分，理论依据可靠；计算结果仅一次近似便与数值解法（一般认为是精确解）的误差已小于  $3.4\%$ ，如此高精度解析方法，对非线性 RLC 电路设计将具有很好的实用价值。

### 参考文献：

- [1] 邱关源. 现代电路理论[M]. 北京:高等教育出版社, 2006.
- [2] 郑近德,程军圣,曾鸣. 基于改进的局部特征尺度分解和归一化正交的时频分析方法[J]. 电子学报, 2015,43(7):1418-1424.
- [3] GIAOURIS D, BANERJEE S, IMRAYED O, et al . Complex interaction between tori and onset of three-frequency quasi-periodicity in a current mode controlled Boost converter [J]. IEEE Transaction on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2012,59(1):207-214.
- [4] YESOOHA V, KAVIPRIYA R, JOSHN T S, et al. Analysis of chaos and bifurcation in DC-DC converter using matlab[C]//International Conference on Circuits, Power and Computing Technologies. Nagercoil: IEEE, 2013: 481-487.
- [5] 罗晓华,罗诗裕. 三束储存与电子同步运动的动力学稳定性[J]. 中国科学(物理学,力学和天文学), 2014,44(2):169-175.
- [6] RATHEE A,PARTHASARATHY H. Perturbation-based stochastic modeling of nonlinear circuits [J]. Circuits Systems Signal Process , 2012, 32(1): 123-141
- [7] FINGER L,UHLMANN H. Effective computation of the poincare map for the analysis of nonlinear dynamic circuits/systems using runge-kutta triples [J]. Journal of Circuits System & Computers, 2011, 4(1):93-98.
- [8] JIAO D,ZHU O. Method for accurate and efficient signaling analysis of nonlinear circuits[C]// IEEE Symposium on Electromagnetic Compatibility and Signal Integrity, 2015.

- [9] KOLKS Z, BIOLEK D, BIOLKOVA V. Frequency-domain steady-state analysis of circuits with mem-elements [J]. *Analog Integrated Circuits & Signal Processing*, 2013, 74(1):79-89
- [10] GARCIA N. Periodic steady-state solutions of nonlinear circuits based on a differentiation matrix[C]// *Circuits and Systems (ISCAS)*, Proceedings of 2010 IEEE International Symposium, 2010.
- [11] ANGELONE G, VASCA F, IANNELLI L. Dynamic and steady-state analysis of switching power converters made easy: Complementarity formalism[C]// *Dynamics and Control of Switched Electronic Systems*, 2012:217-243.
- [12] MOHAMMAD J S, YASSR M B. General SPICE models for memristor and application to circuit simulation of memristor-based synapses and memory cells[J]. *Journal of Circuits System & Computers*, 2010, 19(2):407-424.
- [13] 姚齐国. 几种非线性电路的数值分析与优化设计[D]. 武汉: 华中科技大学, 2007.
- [14] 孙璐. 基于散射函数的一种微波非线性电路建模新方法, [D]. 西安: 西安电子科技大学, 2010.
- [15] 张晓芳, 陈章耀, 毕勤胜. 非线性电路通向混沌的演化过程[J]. *物理学报*, 2010, 59(5):3057-3065.

(上接第67页)

### 参考文献:

- [1] NTONIFOR N N, PQRR M C, EWU KEM J A Ewunkem. Seasonal abundance and distribution of the huntsman spider, *Heteropoda venatoria* (Sparassidae: Araneae) in banana agro-ecosystems in Cameroon [J]. *Journal of Entomology*, 2012, 9: 79-88.
- [2] VENKATESHALU, HANUMANTHRAYA L, MARADDI G. Impact of different rice agro-ecosystem on spider population dynamics [J]. *Environment and Ecology*, 2009, 27(3A): 1231-1236.
- [3] VENTURINO E, ISAIA M, BONA F, et al. Modeling the spiders ballooning effect on the vineyard ecology [J]. *Mathematical Modeling of Natural Phenomena*, 2006, 1(1): 137-159.
- [4] CHATTERJEE S, ISAIA M, VENTURINO E. Effects of spiders predational delays in intensive agroecosystems [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, 10: 3045-3058.
- [5] SEN M, BANERJEE M, VENTURINO E. A model for biological control in agriculture [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2013, 87(1): 30-44.
- [6] 王利娟, 姜洪领. 一类捕食食饵模型正解的定性分析和数值模拟[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2015, 54(4): 55-62.
- [7] 姜洪领, 王利娟. 一类无搅拌 Chemostat 模型平衡态正解存在性与数值模拟[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2011, 50(3): 11-16.
- [8] WEI F. Coexistence, stability, and limiting behavior in a one-predator-two-prey model [J]. *Journal of mathematical analysis and applications*, 1993, 179(2): 592-609.
- [9] DANCER E N, DU Y H. Positive solutions for a three-species competition system with diffusion-I. General existence results [J]. *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, 1995, 24(3): 337-357.
- [10] DANCER E N, DU Y H. Positive solutions for a three-species competition system with diffusion-II. The case of equal birth rates [J]. *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, 1995, 24(3): 359-373.
- [11] DU Y H, LOU Y. Some uniqueness and exact multiplicity results for a predator-prey model [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1997, 349(6): 2443-2475.
- [12] WANG L J, JIANG H L, LI Y. Positive steady state solutions of a plant-pollinator model with diffusion [J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, 2015, 20: 1805-1819.
- [13] YAMADA Y. Stability of steady states for prey-predator diffusion equations with homogeneous Dirichlet conditions [J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1990, 21(2): 327-345.